**XX районный фестиваль юных математиков**

*Старшая группа Финал 16 мая 2024 года*

1. Искусственный интеллект Василий вышел из-под контроля и заблокировал компьютер ученика Пети, который не хотел учится. Чтобы открыть доступ к любимым играм Василий предложил Пете решить простую задачу.

Посчитай, какое число будет стоять в последовательности:

1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 7, 8, 9, 8, 9, 10… на 2024 месте.

*Автор задачи учитель информатики Егорлыкской СОШ №11 Даниелян Саркис Согомонович.*

Решение: В данной последовательности каждое новое число начиная с 3 (3,4,5,6,7…) появляется на месте кратном 3. Причем:

|  |  |
| --- | --- |
| Число | Место |
| 3 | 3 (3·1) |
| 4 | 6 (3·2) |
| 5 | 9 (3·3) |
| 6 | 12 (3·4) |
| 7 | 15 (3·5) |
| 8 | 18 (3·6) |
| 9 | 21 (3·7) |
| … | … |

Заметим закономерность: число = (место/3) + 2. Ближайшее число к 2024 кратное 3 это 2022. 2022/3 + 2 = 674 + 2 = 676. Число 676 – появляется на 2022 месте. Значит далее идут числа 675, 676 на 2023 и 2024 местах соответственно.

Ответ: 676.

2. Сколько всего пятизначных чисел, которые делятся на 17 и оканчиваются на 17?

Решение. Пусть искомое число , тогда разность тоже кратно 17. Но , и поскольку числа 17 и 100 взаимно просты, то двузначное число делится на 17. Остается выяснить, сколько всего трехзначных чисел кратных числу 17. Самое маленькое – это 102. Остальные числа являются членами арифметической прогрессии , при условии , то есть , поэтому . Самым большим трехзначным числом является 986.

Значит, чисел, удовлетворяющих условию задачи всего 53: от самого маленького 10217 до самого большого числа 98617 с шагом 1700. Легко проверить, что все эти удовлетворяют условию.

Ответ: 53.

3. Найдите значение выражения , если .

Решение. Сократим дробь на , получим .

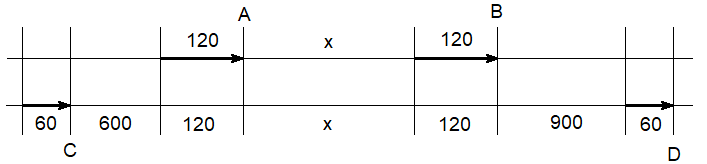
Учитывая, что , получим , поэтому, при получим .

Ответ. 0,04.

4. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 60 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 600 метров. Через 15 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 900 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение. Пусть расстояние между носом первого сухогруза и его кормой через 15 минут рано м, тогда пройденный путь первого сухогруза равен *S1* м.

За это время второй сухогруз прошел путь CD, он равен м

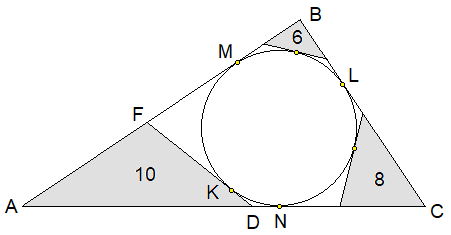
**

Поэтому за час каждый сухогруз прошел в 4 раза больше, значит, их скорости равны м/час и м/час соответственно? А их разность равна 4(

Ответ. 6,72 км/ч.

5. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8 и 10. Найдите периметр треугольника АВС.

Решение. Отрезки касательных равны, поэтому FM=FK и DK=DN, поэтому АM + AN = AFD = 10. Аналогично, BM + BL = 6 и CL + CN = 8.

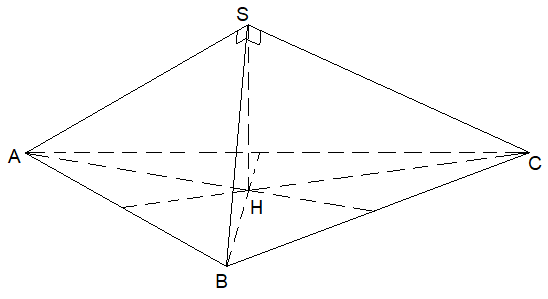


Теперь можно найти периметр треугольника АВС, PАВС = 10+6+8 = 24.

Ответ. 24.

6. Боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды SABC взаимно перпендикулярны, и каждое из них равно 4. Найдите высоту пирамиды, проведенной к основанию ABC.

Решение. Боковые грани этой пирамиды равные прямоугольные треугольники, поэтому их гипотенузы равны, их длины равны , и треугольник ABC – правильный, его площадь равна

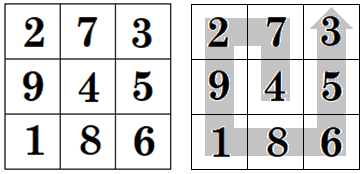


Объем пирамиды, с одной стороны, равен , с другой стороны, равен , поэтому приравняв эти выражения, получим

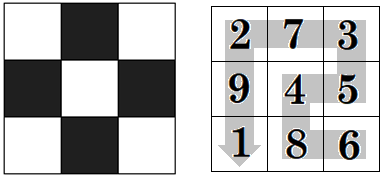
, откуда, поэтому .

Ответ. *.*

7. Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке слева. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю (по стороне), нужно пройти все клетки, при этом ни в какую клетку не разрешается попадать дважды. Рома прошёл, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, – получилось число 472918653. Нарисуйте другой путь так, чтобы получилось наибольшее девятизначное число.



Решение. Если обойти все клетки доски, то получится девятизначное число. Девятизначное число тем больше, чем больше его первая цифра. Но девятизначного числа, начинающегося с 9, построить не удастся. Более того, ни для какой из чёрных клеток (см. рисунок ниже слева) не существует начинающегося в ней пути, проходящего по всем клеткам доски. Действительно, ход из чёрной клетки всегда приводит в белую. Всего чёрных клеток четыре, поэтому белых клеток на любом таком пути тоже не более четырёх – все пять белых клеток так не обойти.



Поэтому надо начать с самой большей "белой" цифры – цифры 6, перейти к её наибольшему соседу, цифре 8, а потом к её наибольшему соседу, цифре 4. Затем придётся перейти к клетке с цифрой 5 – иначе обойти всю доску не получится. Далее путь единственный. Наибольшее число, которое можно получить, – (см. рис. справа).

Ответ. 684537291.

8. При каких значениях k уравнение имеет три различных корня?  
Решение. Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

или

Запишем эти уравнение в виде квадратных уравнений.

или .

Пусть дискриминанты этих уравнений равны *D1 = k2+4* и *D2 = k2 – 4* соответственно.

Заметим, что *D1 > 0* при любом значении k, то есть первое уравнение при любом значении k имеет два различных корня. Чтобы исходное уравнение имело три различных корня нужно, чтобы второе уравнение имело один корень, значит, его дискриминант *D2 = 0,* то есть при *k2 – 4 = 0.* Решая это уравнение, находим, что при *k = 2* и *k = –2* данное уравнение имеет три различных корня. Не лишне убедиться, что *x3 x1* и *x3 x2*.

Ответ. *k = 2* и *k = –2*.